Institut la centrale | Analyse 2 | 10-11

Series entieres

1/ Définition : Toute serie de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $a_n \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$

2/ Domaine de convergence : $\Delta = \{x \in \mathbb{R} ; \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ converge}\}$

3/ Lemme d'Abel :

Soit $\sum a_n x^n$ une serie entiere. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors :

a/ la serie $\sum a_n x^n$ est Absolument convergente pour $|x| < |x_0|$

b/ la serie $\sum a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$; $\forall\, 0 < r < |x_0|$

4/ Theoreme : Toute serie entiere c.v uniformement sur tout intervalle $[a,b] \subset \Delta$: domaine de convergence

5/ Rayon de convergence :

a/ Theoreme : $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une serie entière ; Alors il existe un unique réel $R \geq 0$ (eventuellement infini) tel que :

① $\sum a_n x^n$ converge absolument sur $]-R, R[$ ② $\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$

b/ Definition : le nombre $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : \sum |a_n| r^n \text{ c.v}\}$ est le rayon de c.v

c/ Remarque : le rayon de c.v d'une serie entiere $\sum a_n x^n$ est caracterisé par

1) $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ est Absolument c.v don c.v

2) $|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ div

3) $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la serie

d/ Determination du rayon de c.v

~~* Lemme d'Hadamard~~

Soit $\sum a_n x^n$ une serie entiere. le rayon de c.v est donné par la relation :
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Exemples : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$; $R = \infty$; $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$; $R = 1$; $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2^n}$. $R = 2$

* Remarque : Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la serie suivante $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ est une serie entiere. On calcule tout d'abord
$$l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| . |x^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|$$
puis on cherche

le domaine de x où $l<1$. R est donc $\sup\{l \in \overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\}$.

Exemple : $\sum 3^n x^{2n+5}$; $l = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3^{n+1} \cdot x^{2n+7}}{3^n \cdot x^{2n+5}}\right| = 3|x|^2$

la serie c.v si $3|x|^2 < 1 \iff |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où le rayon de c.v $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5/ Propriétés : Continuité, Derivabilité et d'Integrabilité

a/ Continuité d'une serie entiere :

Proposition : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une serie entiere de rayon de c.v R et soit

$f :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction definie par $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; f est alors continue

b/ Derivée d'une serie entiere

Proposition : la fct $f :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$;

est derivable et on a $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

c/ Primitive d'une serie entiere

Proposition : Soit $f :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$

la fct $F :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$; $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une primitive

de f cad $\forall x \in]-R,R[: F'(x) = f(x)$

Remarque : Dans le cas réel ; si $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, $x \in]-R,R[$

$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{a_{n+1}} x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$

6/ Operations sur les series entieres

Proposition : Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ 2 series entieres de rayon R et R'

ⓐ Si $R \neq R'$ alors le rayon de c.v de $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R'' = \min(R, R')$

ⓑ Si $R = R'$ alors $R'' \geq R$

7/ Developpement en serie entiere

a/ Proposition 1 : Pour qu'une fct f soit developpable en serie entiere au voisinage d'1 point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est necessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas : $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

b/ Proposition 2 : Soit $f \in C^\infty(]-r,r[)$. S'il existe $M > 0$ / $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in]-r,r[. |f^{(n)}(x)| \leq M$ alors la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente dans $]-r,r[$ et on a : $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$